

Первый тур 27.11.2024. Высшая лига.

1. Для каких натуральных n существует перестановка (b_1, b_2, \dots, b_n) чисел $1, 2, \dots, n$ такая, что при любом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ число ib_i даёт при делении на n остаток 0 или 1?

2. Даны натуральные числа m и t . Рассмотрим граф, в котором разрешены кратные ребра, а максимальная степень вершины не превосходит $2m$. Между его вершинами x и y кратчайший путь имеет длину t . Какое наибольшее количество путей длины t может быть между вершинами x и y ?

3. Пусть $p = 2n + 1$ — нечётное простое число. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — перестановки конечного множества X такие, что при любых $1 \leq i, j, k \leq n$ таких, что $ij = k$ или $ij = p - k$, выполнено равенство $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_k$. Докажите, что все эти перестановки являются степенями одной из них.

4. В пространстве дано выпуклое множество K ; оно ограничено, содержит свою границу, и в нём есть хотя бы одна внутренняя точка. Известно, что для любых двух точек A, B его границы существует сечение множества K плоскостью, являющееся кругом с хордой AB . Верно ли, что K — шар?

5. Существуют ли тысяча попарно непересекающихся конечных подмножеств натурального ряда с равными суммами и равными суммами обратных?

6. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_k, w_1, w_2, \dots, w_k$ — комплексные числа, модуль каждого из которых равен 1. Докажите неравенство

$$\sqrt{k^2 - \left| \sum_j z_j w_j \right|^2} \leq \sqrt{k^2 - \left| \sum_j z_j \right|^2} + \sqrt{k^2 - \left| \sum_j w_j \right|^2}.$$

7. Дан вписанный пятиугольник $P_1 P_2 P_3 P_4 P_5$; положим $P_6 = P_1$ и $P_0 = P_5$. При $k = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначим через I_k центр вписанной окружности треугольника $P_{k-1} P_k P_{k+1}$. Оказалось, что пятиугольник $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5$ также является вписанным. Докажите, что прямые $P_1 I_1, P_2 I_2, P_3 I_3, P_4 I_4$ и $P_5 I_5$ пересекаются в одной точке.

8. Дано натуральное $N > 1000$. Рассматриваются последовательности длины N , состоящие из чисел 1 и -1 . Назовём последовательность *растущей*, если никакая сумма нескольких её членов, стоящих подряд, не равна -100 . Назовём последовательность *маленькой*, если никакая сумма нескольких первых её членов не равна -100 или 101. Докажите, что количества растущих и маленьких последовательностей равны.

9. Внутри остроугольного треугольника ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$, выбирается переменная точка P так, что $\angle BPC = 120^\circ$. Точки P_B, P_C симметричны точке P относительно сторон AC, AB соответственно. Прямые BP_B, CP_C пересекаются в точке Q . Докажите, что описанная окружность треугольника APQ проходит через точку, отличную от A и не зависящую от выбора P .

10. На клетчатой доске 2025×2025 расставлено несколько слонов. Каждая клетка на границе квадрата свободна, но находится под боем хотя бы одного слона. Какое наибольшее количество клеток, не находящихся под боем, может быть на доске? Клетка, на которой стоит слон, также считается находящейся под боем этого слона.

Первый тур 27.11.2024. Первая лига.

1. Для каких натуральных n существует перестановка (b_1, b_2, \dots, b_n) чисел $1, 2, \dots, n$ такая, что при любом $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ число ib_i даёт при делении на n остаток 0 или 1?

2. Дано натуральное число $n > 1$. В стране n баронов, некоторые из которых дружат, дружба всегда взаимна. Король хочет провести на плоскости k параллельных прямых и выделить каждому барону по отрезку на каждой из этих прямых. При каком наименьшем k он гарантированно может это сделать так, чтобы два барона дружили тогда и только тогда, когда на каждой из k прямых их отрезки имеют хотя бы одну общую точку?

3. Пусть $p = 2n + 1$ — нечётное простое число. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — перестановки конечного множества X такие, что при любых $1 \leq i, j, k \leq n$ таких, что $ij = k$ или $ij = p - k$, выполнено равенство $\sigma_i \circ \sigma_j = \sigma_k$. Докажите, что все эти перестановки являются степенями одной из них.

4. В пространстве дано выпуклое множество K ; оно ограничено, содержит свою границу, и в нём есть хотя бы одна внутренняя точка. Известно, что для любых двух точек A, B его границы существует сечение множества K плоскостью, являющееся кругом с хордой AB . Верно ли, что K — шар?

5. Существуют ли тысяча попарно непересекающихся конечных подмножеств натурального ряда с равными суммами и равными суммами обратных?

6. Докажите, что существует положительное число C с таким свойством: если сумма положительных чисел x и y целая, то

$$\{x^2\} + \{y^2\} + \frac{C}{(x+y)^2} \leq 2.$$

7. Дан вписанный пятиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5$; положим $P_6 = P_1$ и $P_0 = P_5$. При $k = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначим через I_k центр вписанной окружности треугольника $P_{k-1}P_kP_{k+1}$. Оказалось, что пятиугольник $I_1I_2I_3I_4I_5$ также является вписанным. Докажите, что прямые $P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3, P_4I_4$ и P_5I_5 пересекаются в одной точке.

8. Дано натуральное $N > 1000$. Рассматриваются последовательности длины N , состоящие из чисел 1 и -1 . Назовём последовательность *растущей*, если никакая сумма нескольких её членов, стоящих подряд, не равна -100 . Назовём последовательность *маленькой*, если никакая сумма нескольких первых её членов не равна -100 или 101. Докажите, что количества растущих и маленьких последовательностей равны.

9. Внутри остроугольного треугольника ABC , в котором $\angle A = 60^\circ$, выбирается переменная точка P так, что $\angle BPC = 120^\circ$. Точки P_B, P_C симметричны точке P относительно сторон AC, AB соответственно. Прямые BP_B, CP_C пересекаются в точке Q . Докажите, что описанная окружность треугольника APQ проходит через точку, отличную от A и не зависящую от выбора P .

10. На клетчатой доске 2025×2025 расставлено несколько слонов. Каждая клетка на границе квадрата свободна, но находится под боем хотя бы одного слона. Какое наибольшее количество клеток, не находящихся под боем, может быть на доске? Клетка, на которой стоит слон, также считается находящейся под боем этого слона.